Theoretische Physik II
für Lehramtsstudenten
WS 2005/06

Vorlesungen: Michael Flohr
Übungen: Christian Sämann
Übungsleitung: Kirsten Vogeler

10. Übung

(Abgabe: 10.1.2005)

22. *Kurzfragen:*

    (a) Ein System sei im Eigenzustand eines Operators A. $\Delta A =?$

    (b) Stimmt $(|a\rangle\langle b|c\rangle\langle d|)^\dagger = |d\rangle\langle a|\langle b|c\rangle^*$?

    (c) Erläutern Sie ein Experiment, dass auf den Teilchencharakter von Licht hindeutet.

    (d) Wie lautet die Ortsraumswellenfunktion für eine ebene de-Broglie Welle?

    (e) Warum und wie normiert man Wellenpakete?

    (f) Was ist eine physikalische Observable in der Quantenmechanik?

    (g) Gegeben sei ein Zustand in der Ortsdarstellung $\psi(x)$. Wie lautet die Formel für den Impulserwartungswert?

    (h) Vervollständigen Sie die Dichtematrix $\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3/2 & (1+\mathrm{i})/3 \\ ? & ? \end{pmatrix}$. Beschreibt diese einen reinen oder gemischten Zustand? (jeweils 0.5 P)

23. *Bewegungsgleichung für Wahrscheinlichkeitsdichten:* Hier wollen wir zeigen, dass wir die Wellenfunktion oder Wahrscheinlichkeitsamplitude wirklich benötigen, und uns nicht auf Untersuchungen der Wahrscheinlichkeitsdichte beschränken können. Wir wagen uns also noch einmal an die anscheinend verwirrende Aufgabe Nr. 16.

    (a) Gegeben sei der Hamiltonoperator $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(\hat{x})$ in Ortsdarstellung. Was gilt für die Zeitentwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x) = |\psi(x)|^2$ einer Wellenfunktion $\psi(x)$, die die Schrödingergleichung erfüllt?

    (b) Zerlegen Sie nun die Wellenfunktion in einen Betrag und eine Phase und rechnen Sie damit weiter.

    (c) Unter (a) haben Sie $\dot{\rho}$ als eine Summe zweier Terme geschrieben. Dadurch haben Sie Information verloren, die Sie aber erhalten, wenn Sie auch die Differenz betrachten. (Kennt man die Summe und die Differenz zweier Zahlen, so kennt man die beiden Zahlen.) Erinnern Sie sich auch an die Behandlung des Wahrscheinlichkeitsstroms.

    (d) Verknüpfen Sie alle Ihre Resultate, und zeigen Sie so, dass man die Phase nicht aus der Differentialgleichung für $\dot{\rho}$ eliminieren kann. (5 P.)

24. *Zeitunabhängige Schrödingergleichung:* Leiten Sie aus der Schrödingergleichung $\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}\psi$ für einen zeitunabhängigen Hamiltonoperator $\hat{H}$ mittels Separationsansatz die zeitunabhängige Schrödingergleichung und eine Gleichung für die Zeitentwicklung ab . Geben Sie allgemeine Lösungen an. Warum funktioniert hier ein Separationsansatz? (2 P.)

25. *Gaußpaket, die zweite:* Aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist die Normalverteilung bekannt:

$$|\psi(x)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2a^2}\right) .$$

Wir wissen, dass $\int \mathrm{d}x |\psi(x)|^2 = 1$ gilt und die beiden Parameter $\mu \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ die Kurve vollständig bestimmen.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $|\psi(x)|^2$ Wendepunkte bei $x = \mu \pm a$ hat, und dass, wenn man $|\psi(x)|^2$ als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretiert, die Ortsunschärfe durch a gegeben ist.

(b) Wir wollen nun eine Gaußkurven-förmige Wellenfunktion zeitentwickeln. Dazu machen Sie den Ansatz $\psi(x) = A\mathrm{e}^{Bx^2}$, den Sie möglichst geschickt normieren (siehe oben). Setzen Sie nun das Wellenpaket "in Bewegung", indem Sie es mit $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 x}$ multiplizieren und bestimmen Sie anschließend die Fouriermoden $\tilde{\psi}(k)$.

(c) Wie lautet die Zeitentwicklung des Zustandes $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$? Entwickeln Sie so alle Fouriermoden $\tilde{\psi}(k)$ und berechnen Sie daraus die Zeitentwicklung $\tilde{\psi}(k,t)$. Wie lautet also $\psi(x,t)$?

(d) Wie lautet $|\psi(x,t)|^2$? Was gilt für die Zeitentwicklung der Ortsunschärfe? (7 P.)

26. *Kastenpotential, die zweite:* Werfen wir noch einmal einen Blick auf das Teilchen im unendlich tiefen Potentialtopf von Präsenzübung 1.

(a) Verschieben Sie das Potential derart entlang der x-Achse, dass als Lösungen der zeitunabhängigen Schrödingergleichung nur Sinus-Funktionen auftauchen, und geben Sie diese explizit an.

(b) Betrachten Sie nun die Zeitentwicklung der Energieeigenzustände. Wie lange dauert es, bis der Zustand ψ_n wieder seine ursprüngliche Form angenommen hat?

(c) Wie lange dauert dies für einen Zustand $\psi_{n_1} + \psi_{n_2} + \psi_{n_3}$? Was schließen Sie daraus für die Unschärfe eines beliebigen Zustandes im Potentialtopf? (5 P.)

27. *de-Broglie-Beziehung:* Hier einige kurze Betrachtungen zu einer Gleichung, die einem Teilchen mit Impuls p eine Wellenzahl k zuordnet und de Broglie (sprich: "dö Broy") fast die Doktorwürde gekostet hätte.

(a) Leiten Sie diese Beziehung aus der Tatsache ab, dass die Ortsraumwellenfunktionen $\psi_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ Eigenfunktionen des Impulsoperators sind.

(b) Berechnen Sie die de-Broglie-Wellenlänge des Elektrons, des Wasserstoffatoms im Grundzustand, eines Atoms eines atomaren Gases in drei Dimensionen mit Masse $4u$ bei 25°C, sowie einer Erbse ($v = 1\frac{m}{s}$).

(c) Wie schnell darf ein *Buckyball* C_{60}-Molekül sein, um an einem vernünftig dimensionierten Doppelspaltexperiment (Gitterkonstante 100nm) noch ein sichtbares Intereferenzmuster (1. Maximum bei 2°/1000) zu erzeugen?

(d) Wo liegen die Maxima des Beugungsmusters, das sich beim Durchschreiten einer Tür ergeben sollte? (5 Bonuspunkte)